

戦略の数理—ランチェスターの法則

Mathematical Model of Strategy : Lanchester's Laws

矢田部 学*

Manabu Yatabe

第一次世界大戦中、ランチェスターは敵対する二つの戦力の状態を考察するための微分方程式を提案した。その方程式から導かれる法則は戦略の指針を示し、軍事的な作戦ばかりでなく、今日ではビジネスにおける経営戦略にも応用されている。本レポートではランチェスターの法則について一つの解説を試みる。

Lanchester formulated differential equations to describe two opposed war powers during the First World War. Laws derived from the equations indicate guidelines for battle plans. Nowadays the laws are applied to not only military operations but also business strategy. We review the fundamental concept of the Lanchester's laws in this report.

1. まえがき

第一次世界大戦中の1916年、英国のランチェスター (Frederick W. Lanchester) は対立する戦力の変化を記述する方程式を提案した。これは時間に関する1階の連立微分方程式である。この方程式に基づき、ランチェスターは1次法則 (一騎打ちの法則)、2次法則 (集中効果の法則) と呼ばれる法則を見出した¹⁾。

ランチェスターの方程式・法則は軍事を分析するために提唱されたものであるが、今日ではその考え方は経営戦略にも適用されている²⁾。これはビジネスの世界も企業の生存競争と考えれば当然のことであろう。

ランチェスターの方程式は比較的簡単な方程式であるため、その考え方や解法は、様々な現象 (人口問題、生存競争、環境問題、在庫状況など) のモデリングやシミュレーションに参考になると考えられる。そこで、本レポートでは、ランチェスター方程式の考え方や解析的な解法などについてまとめた私的メモの一部を紹介する。

2. 基本法則

ランチェスターの二つの基本法則である、1次法則と2次法則について述べる。

2.1 1次法則

ランチェスターの1次法則は「一騎打ちの法則」とも呼ばれ以下を前提とする。

- ・一度に一人の相手と戦う「一騎打ち」を想定
- ・つまり、近距離の戦いをモデル化

・戦力の減少は相手の武器性能に比例
これらは戦国時代の戦い方のイメージで、X軍とY軍の戦力は以下の方程式で記述される。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha \\ \frac{dy}{dt} = -\beta \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{初期条件: } x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

ただし、

$x \geq 0$: X軍の戦力数

$y \geq 0$: Y軍の戦力数

$\alpha > 0$: Y軍の武器性能

$\beta > 0$: X軍の武器性能

(1)からわかるように x と y は独立である。したがって、それぞれを積分して、時刻 t でのX軍とY軍の残存戦力は以下ようになる。

$$x(t) = x_0 - \alpha t, \quad y(t) = y_0 - \beta t \quad (3)$$

これらより、 t を消去すると

$$x_0 - x = E(y_0 - y) \quad (4)$$

ただし、 $E = \frac{\alpha}{\beta}$: 武器性能比

これがランチェスターの1次法則である。

X軍とY軍の初期戦力を、それぞれ $x_0 = 5$ および $y_0 = 7$ とする。また、X軍とY軍の武器性能を、それぞれ $\beta = 2$ および $\alpha = 1$ とする。つまり、初期戦力ではY軍が勝っているが武器性能はX軍のほうが高い。この場合の(1)の解(3)をプロットしたものが図1である。これより、初期戦力が劣っていても、高性能の武器を使用す

れば勝つという結論になる。

X軍の残存戦力は1次法則(4)より、以下のように算出できる。

$$(5-x) = \frac{1}{2} \times (7-0) \quad \Rightarrow \quad x = 1.5$$

同じ武器性能比 $E = \alpha/\beta = 1/2$ であっても、異なる武器性能 $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ と $(\alpha, \beta) = (2, 4)$ ではY軍の戦力がゼロになるまでの時間が異なることが、式(3)よりわかる。

2.2 2次法則

ランチェスターの2次法則は「集中効果の法則」とも呼ばれ以下を前提とする。

- ・一人で複数の敵を同時に攻撃可能
- ・つまり、遠距離攻撃可能な武器を使用した場合に相当
- ・戦力の減少は相手の武器性能と戦力の積に比例

これらは近代の戦争のイメージで、X軍とY軍の戦力は以下の方程式で記述される。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay \\ \frac{dy}{dt} = -bx \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{初期条件: } x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (6)$$

ただし、

$x \geq 0$: X軍の戦力数

$y \geq 0$: Y軍の戦力数

$a > 0$: Y軍の武器性能

$b > 0$: X軍の武器性能

$bx \times (5)$ 第1式 - $ya \times (5)$ 第2式の結果を時間 t で積分して

$$bx^2 - ay^2 = C \quad (C : \text{積分定数})$$

(6)を適応すると、 $C = bx_0^2 - ay_0^2$ なので

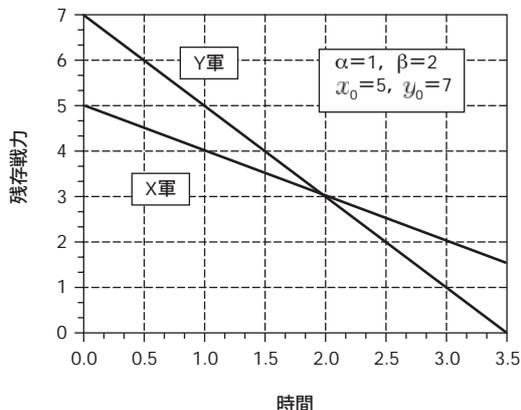


図1 1次法則

$$x_0^2 - x^2 = E(y_0^2 - y^2) \quad (7)$$

ただし、 $E = \frac{a}{b}$: 武器性能比

これがランチェスターの2次法則である。

また、初期条件(6)で(5)を解析的に解くと、時刻 t でのX軍とY軍の残存戦力は以下ようになる(導出は付録参照)。

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \left(x_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \right) \exp(\sqrt{ab}t) + \frac{1}{2} \left(x_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \right) \exp(-\sqrt{ab}t) \\ y(t) = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x_0 - y_0 \right) \exp(\sqrt{ab}t) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x_0 + y_0 \right) \exp(-\sqrt{ab}t) \end{cases} \quad (8)$$

2次法則についても1次法則と同様に考えることができる。X軍とY軍の初期戦力を、それぞれ $x_0 = 5$ および $y_0 = 7$ 、X軍とY軍の武器性能を、それぞれ $b = 3$ および $a = 1$ とする。この場合の(5)の解(8)をプロットしたものが図2である。

X軍の残存戦力は2次法則(7)より、以下のように算出できる。

$$(25 - x^2) = \frac{1}{3} \times (49 - 0) \quad \Rightarrow \quad x \simeq 2.94$$

1次法則と同様に、同じ武器性能比 $E = a/b$ であっても、異なる武器性能 (a, b) では戦いの終了までの時間(一方の戦力がゼロ)になるまでの時間が異なることが、式(8)よりわかる。

2.3 1次法則と2次法則の比較

以下の条件のもとに、1次法則と2次法則を比較する。

- ・両軍の武器性能は同じとする(武器性能比: $E = 1$)
- ・初期戦力はX軍 $x_0 = 5$ 、Y軍 $y_0 = 3$ でX軍優勢とする

これらを式(4)の1次法則と式(7)の2次法則に適用する。

$$\text{1次法則: } (5-x) = 1 \times (3-0) \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$\text{2次法則: } (25-x^2) = 1 \times (9-0) \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

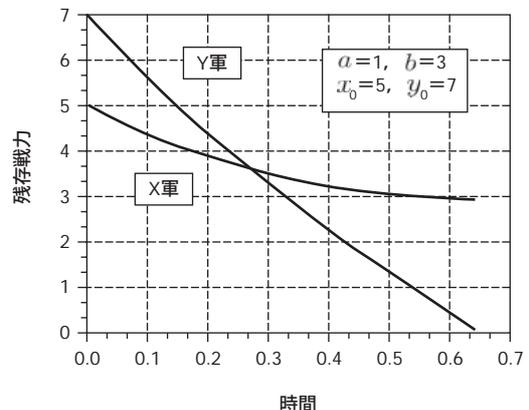


図2 2次法則

つまり、戦力優勢なX軍は2次法則で戦ったほうが、残存が大きくなる。他方、戦力劣性のY軍は1次法則で戦ったほうがX軍に大きな被害を与えることができる(図3参照)。

これはビジネスにおける経営戦略についても同様であると考えられる。つまり、大企業は多角経営で2次法則的に経営を行ったほうがよく、中小企業は特定分野に特化して1次法則的に経営を行ったほうが、業界にインパクトを与えることができる。

3. 基本法則の拡張

基本法則を拡張して、戦力の分割と補給の効果を取り入れた以下の方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -cx - ay + P \\ \frac{dy}{dt} = -dy - bx + Q \end{cases} \quad (9)$$

ただし、

$x \geq 0$: X軍の戦力数

$y \geq 0$: Y軍の戦力数

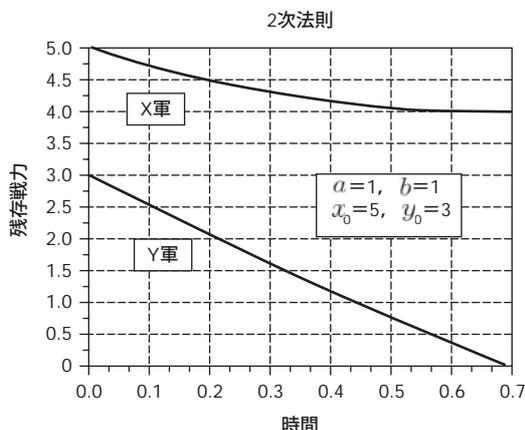
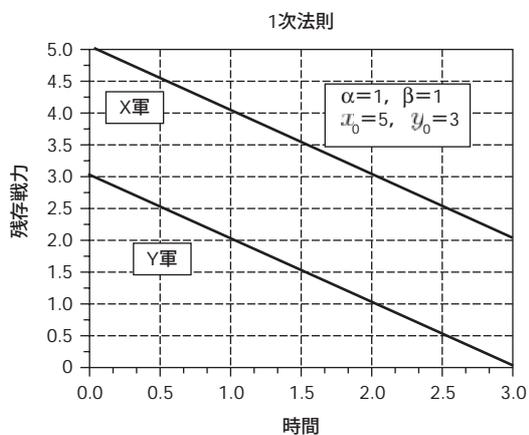


図3 1次法則と2次法則

$a > 0$: Y軍の武器性能

$b > 0$: X軍の武器性能

$c \geq 0$: 作戦で生じるX軍の戦力減少

$d \geq 0$: 作戦で生じるY軍の戦力減少

$P \geq 0$: X軍の戦力増加(補給率)

$Q \geq 0$: Y軍の戦力増加(補給率)

初期条件: $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ で(9)を解析的に解くと、時刻 t でのX軍とY軍の残存戦力は以下のようになる(導出は付録参照)。

$$\begin{cases} x(t) = \varepsilon \exp[(\mu - \gamma)t] + \frac{\sigma}{b}(\mu + \kappa) \exp[-(\mu + \gamma)t] + u \\ y(t) = -\frac{\varepsilon}{a}(\mu + \kappa) \exp[(\mu - \gamma)t] + \sigma \exp[-(\mu + \gamma)t] + w \end{cases} \quad (10)$$

ただし、

$$\begin{cases} u = \frac{aQ - dP}{ab - cd}, \quad w = \frac{bP - cQ}{ab - cd}, \quad ab - cd = \mu^2 - \gamma^2 \\ \gamma = \frac{c+d}{2}, \quad \kappa = \frac{c-d}{2}, \quad \mu = \sqrt{\kappa^2 + ab} \\ \varepsilon = \frac{ab}{2\mu(\mu + \kappa)} \left[\left(x_0 + \frac{d + \mu + \kappa P}{ab - cd} \right) - \frac{\mu + \kappa}{b} \left(y_0 + \frac{c + \mu - \kappa Q}{ab - cd} \right) \right] \\ \sigma = \frac{ab}{2\mu(\mu + \kappa)} \left[\frac{\mu + \kappa}{a} \left(x_0 + \frac{d - \mu + \kappa P}{ab - cd} \right) + \left(y_0 + \frac{c - \mu - \kappa Q}{ab - cd} \right) \right] \\ (ab \neq cd) \end{cases} \quad (11)$$

X軍とY軍の初期戦力を $x_0 = 4$ および $y_0 = 2$ とし、X軍とY軍の武器性能は等しく $b = 2$ および $a = 2$ とする。作戦で生じるX軍とY軍の戦力減少は等しく $c = 1$ および $d = 1$ とする。また、X軍の補給率を $P = 2$ 、Y軍のそれを $Q = 6$ とする。この場合の(9)の解(10)をプロットしたものが図4である。初期戦力が劣っていても、戦力の補給率を大きくすると勝つことが可能となる。

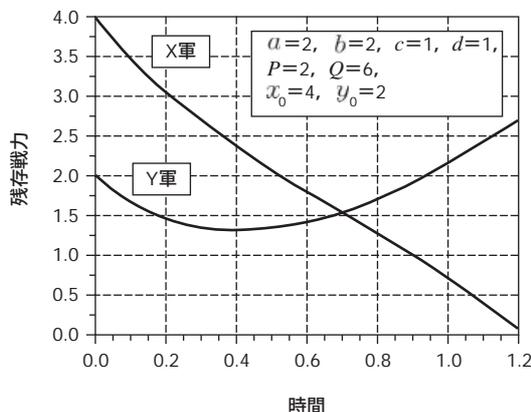


図4 戦力分割と補給の効果を考慮したランチェスターの法則

4. 簡単な応用例

ランチェスター方程式の簡単な応用を示す。X国とY国の戦いをモデル化する。

両国の戦力は海軍と空軍からなるものとする。これらの戦力が同時に戦闘を開始して、どちらか一方の国の戦力がゼロになるまで戦いを続けるものとする。これを以下の方程式で表す。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_N \\ x_A \\ y_N \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A & -B \\ 0 & 0 & -C & -D \\ -E & -F & 0 & 0 \\ -G & -H & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_N \\ x_A \\ y_N \\ y_A \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\text{初期条件: } \begin{pmatrix} x_N(0) \\ x_A(0) \\ y_N(0) \\ y_A(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{N0} \\ x_{A0} \\ y_{N0} \\ y_{A0} \end{pmatrix}$$

ただし、

x_N : X国海軍の戦力
 x_A : X国空軍の戦力
 y_N : Y国海軍の戦力
 y_A : Y国空軍の戦力

A : X国海軍に対するY国海軍の武器性能
 B : X国海軍に対するY国空軍の武器性能
 C : X国空軍に対するY国海軍の武器性能
 D : X国空軍に対するY国空軍の武器性能
 E : Y国海軍に対するX国海軍の武器性能
 F : Y国海軍に対するX国空軍の武器性能
 G : Y国空軍に対するX国海軍の武器性能
 H : Y国空軍に対するX国空軍の武器性能

パラメーターとして以下を与える。

$$A = 2, \quad B = 2, \quad C = 2, \quad D = 2 \\ E = 1, \quad F = 1, \quad G = 1, \quad H = 1$$

つまり、武器性能はY国のほうがX国より勝っている。また、初期戦力は

$$x_N(0) = 4, \quad x_A(0) = 2, \quad y_N(0) = 3, \quad y_A(0) = 5$$

とする。式(12)を4次のルンゲークッタ法で数値的に積分したものを図5に示す。X国の空軍が全滅し、その後、海軍も全滅する。最終的にY国が勝つ結果となった。

5. むすび

以上、ランチェスターの方程式とそれから導かれる法則について述べた。これらの考え方は比較的簡単である。そのために数理的なモデルリングが未開発の分野の考察を開始するときには参考になる。そのような機会があれば積極的にランチェスターの考え方を適用したいと考えている。

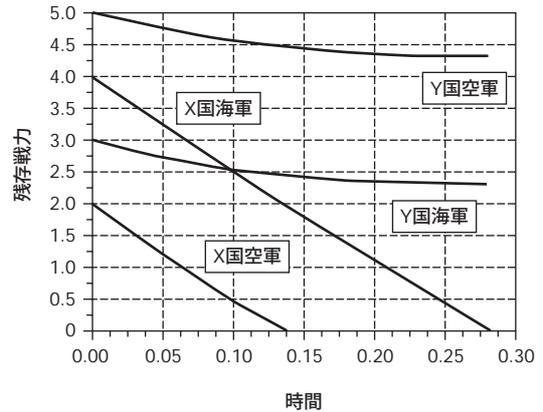


図5 X国とY国の戦い

参考文献

- [1] 金吉雅人：ランチェスター方程式の改良と動向，MSS技報，Vol.1，pp.56-60，1989
- [2] 飯田耕司：戦闘の科学 軍事ORの理論，三恵社，2005
- [3] 福永雅文：ランチェスター戦略「一点突破」の法則，日本実業出版社，2007

付録 厳密解の導出

A 2次法則の方程式

式(5)の第1式を t で微分して第2式を代入すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = abx$$

この方程式の一般解は、 A と B を定数として

$$x = A \exp(\sqrt{ab}t) + B \exp(-\sqrt{ab}t) \quad (A1)$$

初期条件(6)を代入すると

$$A + B = x_0 \quad (A2)$$

(5)の第1式と(A1)より

$$A\sqrt{ab} \exp(\sqrt{ab}t) - B\sqrt{ab} \exp(-\sqrt{ab}t) = -ay$$

初期条件(6)を代入して

$$A - B = -\sqrt{a/b} y_0 \quad (A3)$$

(A2)と(A3)より

$$A = \frac{1}{2} \left(x_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(x_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \right)$$

これらを(A1)に代入すると(8)の第1式が得られる。

また、(5)の第2式を t で積分すると、 C を定数として

$$y = - \int bx(t) dt + C$$

これに(8)の第1式を代入し、初期条件(6)を適用すると $C = 0$ となり、(8)の第2式が得られる。

B 戦力分割と補給を考慮した方程式

式(9)と初期条件を行列で表現すると

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{P} \quad (\text{B1})$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (\text{B2})$$

ただし、

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -c & -a \\ -b & -d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

(B1)の両辺に左から $\exp(-\mathbf{A}t)$ を乗じ、時間 t で積分して、初期条件(B2)を適用すると

$$\mathbf{X} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{X}_0 + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{P}d\tau \quad (\text{B3})$$

ここで、行列 \mathbf{A} を対角化して、(B1)を独立な二つの方程式にすることを考える。

行列 \mathbf{A} の固有値 λ と固有ベクトル \mathbf{v} は

$$\lambda_1 = -(\gamma + \mu) \quad \text{に対して} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -(\kappa - \mu)/a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -(\gamma - \mu) \quad \text{に対して} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -(\kappa + \mu)/a \end{pmatrix}$$

なので、行列 \mathbf{A} を対角化する行列は

$$\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -(\kappa - \mu)/a & -(\kappa + \mu)/a \end{pmatrix} \quad (\text{B4})$$

であり、その逆行列は

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \kappa + \mu & a \\ -\kappa + \mu & -a \end{pmatrix} \quad (\text{B5})$$

と表される。ただし、 γ 、 μ および κ は(11)に与えられている。これより、 \mathbf{A} は

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & -(\gamma - \mu) \end{pmatrix} \quad (\text{B6})$$

と対角化される。

他方、 \mathbf{I} を単位行列として

$$\exp(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = \mathbf{I} + \frac{1}{1!}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^2 + \dots = \mathbf{T}^{-1}\exp(\mathbf{A})\mathbf{T}$$

なので

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{T}\exp(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}$$

である。これを(B4)、(B5)および(B6)を用いて具体的に計算すると

$$\exp(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} (-\kappa + \mu)\exp[-(\gamma - \mu)] + (\kappa + \mu)\exp[-(\gamma + \mu)] & \\ -b\exp[-(\gamma - \mu)] + b\exp[-(\gamma + \mu)] & \\ -a\exp[-(\gamma - \mu)] + a\exp[-(\gamma + \mu)] & \\ (\kappa + \mu)\exp[-(\gamma - \mu)] + (-\kappa + \mu)\exp[-(\gamma + \mu)] & \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{X}_0 = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} (-\kappa + \mu)\exp[-(\gamma - \mu)t] + (\kappa + \mu)\exp[-(\gamma + \mu)t] & \\ -b\exp[-(\gamma - \mu)t] + b\exp[-(\gamma + \mu)t] & \\ -a\exp[-(\gamma - \mu)t] + a\exp[-(\gamma + \mu)t] & \\ (\kappa + \mu)\exp[-(\gamma - \mu)t] + (-\kappa + \mu)\exp[-(\gamma + \mu)t] & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{P}d\tau = \frac{1 - \exp[-(\gamma - \mu)t]}{2\mu(\gamma - \mu)} \begin{pmatrix} (-\kappa + \mu)P - aQ \\ -bP + (\kappa + \mu)Q \end{pmatrix} + \frac{1 - \exp[-(\gamma + \mu)t]}{2\mu(\gamma + \mu)} \begin{pmatrix} (\kappa + \mu)P + aQ \\ bP + (-\kappa + \mu)Q \end{pmatrix}$$

これらを(B3)に代入すると(10)が得られる。