クォータニオン計算便利ノート
Handy Note for Quaternions

矢田部　学*
Manabu Yatabe

クォータニオンは回転軸（ベクトル）と回転角（スカラー）よりなる４成分で３次元空間の回転を表現する。クォータニオン表現ではオイラー角による回転表現で生じるような特異点が存在しない。そのため、宇宙・防衛分野における飛翔体の姿勢計算には、伝統的にクォータニオンが用いられてきた。また、最近では３次元コンピューターグラフィックの分野でも物体を表示するためにクォータニオンが使用されている。クォータニオンの定義には、大別すると二つの流儀がある。そのために時々混乱が生じる。本レポートでは飛翔体の姿勢計算に有用なクォータニオンの公式を整理する。

Quaternions describe rotations in the 3-dimensional space by using four components, which consist of a rotation axis vector and an angle.The quantities can avoid such singularities as Euler angles have.For that reason, the quaternion methods have been traditionally used for attitude determinations of flying objects in aerospace and defense areas.Recently the quaternions are used in 3-dimensional computer graphics to represent objects.There are generally two different definitions of the quaternions, which sometimes lead to confusion.We summarize useful formulas for the attitude calculations of the fling objects in this report.

1. まえがき

クォータニオンはアイルランドの数学者ハミルトン（William Rowan Hamilton）により考案され、今日のベクトル解析に代わる手法として、19世紀の数理物理学で用いられた。当時の電磁気学に関する論文の多くはクォータニオンによる表現になっている[(1)]。20世紀になるとギブス（Josiah Willard Gibbs）によるベクトル解析が主流となり、クォータニオン計算は少なくなった。筆者の知る限りでは、クォータニオン計算で記述されている教科書は、堀による「天体力学講義（1988）」くらいである[(2)]。

クォータニオンはベクトル計算の代替手法として用いられることは少ないが、飛翔体の姿勢計算では頻繁に使用される[(3)(4)(5)(6)]。これはオイラー角のような特異点が存在しない理由による。また、最近では３次元コンピューターグラフィックの分野でも物体を表示するためにクォータニオンが使用される[(5)(7)]。

以前、MSS技報でクォータニオンについての解説を試みた[(8)]。そのときは手元にある断片的な公式を整理して体系化することを目的とした。その後、いくつかの宇宙機の姿勢計算に関する業務を経験し有用な公式を再整理した。本レポートでは、飛翔体の姿勢計算に関する技術資料や論文を読む際に便利なクォータニオンの公式に関する私的メモの一部を紹介する。

2. 記号

本レポートで使用する記号についてまとめる。

●ベクトル

ベクトルはボールド体で表し、とくに断りがない限り、その成分を添え字1,2,3で表す。例えば

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$$

と表記する。

●クォータニオン

クォータニオンは上にチルダをつけて表し、その成分を0,1,2,3で表す。また、スカラー部 q_0 とベクトル部 $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ に分けて表すこともある。例えば

$$\tilde{q}=(q_0,\boldsymbol{q})=(q_0,q_1,q_2,q_3)$$

と表記する。または、ベクトル部を $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$、スカラー部を q_4 で表し

$$\tilde{q}=(\boldsymbol{q},q_4)=(q_1,q_2,q_3,q_4)$$

と表記する。

●スカラー積

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のスカラー積（内積）はドットで表す。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

＊鎌倉事業部　第一技術部（博士（理学））

●ベクトル積

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のベクトル積（外積）はクロスで表す。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

3. クォータニオン（四元数）とは

今日のベクトル解析では、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の積の定義が二種類ある（ギブス流）：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（スカラー積）および $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$（ベクトル積）

これらより、以下の積を定義する（ハミルトン流）：

$$\boldsymbol{ab}\equiv-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{1}$$

この定義により二つのベクトルの積はスカラー部（$-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$）とベクトル部（$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$）よりなる拡張された数になっている。この拡張された数をクォータニオン（quaternion）または四元数（しげんすう）という。なお、二つのベクトルの積は非可換である（$\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$）。

直交座標系 x 軸、y 軸、z 軸の基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ とすると(1)より

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-1\\ \boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{jk}=-\boldsymbol{kj}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{ki}=-\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{j}\end{array}\right\} \tag{2}$$

クォータニオン $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ はスカラー部 $-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ とベクトル部 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ より成り立っている。

3.1 クォータニオン

スカラー部を q_0、直交座標系でのベクトル部を $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ とするとクォータニオンは

$$\tilde{q}=q_0+\boldsymbol{q}=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k} \tag{3}$$

ここで、$\boldsymbol{q}=q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$ とおいた。

3.2 共役クォータニオン

クォータニオン $\tilde{q}$ のベクトル部の符号を反転したものを共役クォータニオン $\tilde{q}^*$ という。

$$\tilde{q}^*=q_0-\boldsymbol{q}=q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k} \tag{4}$$

3.3 クォータニオン積

二つのクォータニオン $\tilde{q}$ と $\tilde{p}$ の積は、(1)より以下のようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{q}\tilde{p}&=(q_0+\boldsymbol{q})(p_0+\boldsymbol{p})\\&=q_0p_0+q_0\boldsymbol{p}+p_0\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}\\&=(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)\\&\quad+(q_1p_0+q_0p_1-q_3p_2+q_2p_3)\boldsymbol{i}\\&\quad+(q_2p_0+q_3p_1+q_0p_2-q_1p_3)\boldsymbol{j}\\&\quad+(q_3p_0-q_2p_1+q_1p_2+q_0p_3)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{5}$$

これを、$\tilde{q}$ と $\tilde{p}$ のクォータニオン積（quaternion product）という。クォータニオン積はベクトル部とスカラー部より構成されるから、クォータニオンである。また、クォータニオン積は非可換である（$\tilde{q}\tilde{p}\neq\tilde{p}\tilde{q}$）。

クォータニオン積を行列で表記すると

$$\begin{aligned}\tilde{q}\tilde{p}&=\begin{pmatrix}q_0&-q_1&-q_2&-q_3\\q_1&q_0&-q_3&q_2\\q_2&q_3&q_0&-q_1\\q_3&-q_2&q_1&q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}p_0&-p_1&-p_2&-p_3\\p_1&p_0&p_3&-p_2\\p_2&-p_3&p_0&p_1\\p_3&p_2&-p_1&p_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

3.4 ノルム

共役クォータニオンを用いるとノルムが定義できる。クォータニオンのノルムは

$$\|\tilde{q}\|\equiv\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\sqrt{\tilde{q}\tilde{q}^*}=\sqrt{\tilde{q}^*\tilde{q}} \tag{6}$$

二つのクォータニオン $\tilde{q}$ と $\tilde{p}$ について

$$(\tilde{q}\tilde{p})^*=[(q_0+\boldsymbol{q})(p_0+\boldsymbol{p})]^*=(p_0-\boldsymbol{p})(q_0+\boldsymbol{q})=\tilde{p}^*\tilde{q}^*$$

が成り立つので

$$\|\tilde{q}\tilde{p}\|^2=(\tilde{q}\tilde{p})(\tilde{q}\tilde{p})^*=\tilde{q}\tilde{p}\tilde{p}^*\tilde{q}^*=\|\tilde{q}\|^2\|\tilde{p}\|^2$$

ノルムは正の平方根なので

$$\|\tilde{q}\tilde{p}\|=\|\tilde{q}\|\,\|\tilde{p}\| \tag{7}$$

が成り立つ。

3.5 逆クォータニオン

ノルムを用いると逆クォータニオン

$$\tilde{q}^{-1}=\frac{\tilde{q}^*}{\|\tilde{q}\|^2} \tag{8}$$

を定義できる。この定義と(6)より、$\tilde{q}^{-1}\tilde{q}=\tilde{q}\tilde{q}^{-1}=1$ であり、確かに $\tilde{q}^{-1}$ は逆クォータニオンであることが分かる。また、$\|\tilde{q}\|=1$ の単位クォータニオンは共役が逆クォータニオンになる。

3.6 回転を表すクォータニオン

単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ と回転角 θ として、以下の特別なクォータニオンを考える（図1参照）。

$$\tilde{q}=\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2} \tag{9}$$

このノルムは $\|\tilde{q}\|=1$ である。

このクォータニオンを用いて位置ベクトルと座標系の回転を表すことができる。（ｉ）座標系を空間に固定して位置ベクトルを回転する場合と（ⅱ）点を空間に固定して座標系を回転する場合の変換式を以下に示す（図2参照）。

（ｉ） $\boldsymbol{r}'=\tilde{q}\boldsymbol{r}\tilde{q}^*$ （位置ベクトルの回転） (10)

（ⅱ） $\boldsymbol{r}'=\tilde{q}^*\boldsymbol{r}\tilde{q}$ （座標系の回転） (11)

式⑽を具体的に評価すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \left(\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}+[\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}]\cos\theta+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}\sin\theta \end{aligned} \tag{12}$$

図３に示すような幾何学的な考察により、⑽が位置ベクトルの回転を表すことが分かる。例えばz 軸まわりの回転を考えて、$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 、および$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ を⑽の右辺に代入すると

$$\boldsymbol{r}'=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

となり、これは位置ベクトルの回転を表している（図２参照）。

同様に、点を固定して座標系を回転する場合について式⑾を具体的に評価すると

$$\boldsymbol{r}'=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}+[\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}]\cos\theta+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\sin\theta \tag{13}$$

となる。式⑿と⒀の違いは右辺のベクトル積の順序である。この違いが効いて、例えばz 軸まわりの回転では

$$\boldsymbol{r}'=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

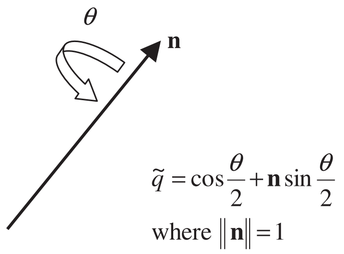

図１　回転を表すクォータニオン

となり、確かに座標系の回転を表している（図２参照)。

3.7　クォータニオン表現による変換行列

位置ベクトルまたは座標系を回転したときの変換行列をクォータニオンの成分 (q_0,q_1,q_2,q_3) で表す。

（ｉ）　位置ベクトルの回転

式⑽より

$$\boldsymbol{r}'=(q_0+\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}(q_0-\boldsymbol{q})\equiv A\boldsymbol{r} \tag{14}$$

として、クォータニオンの部分を展開すると、位置ベクトル$\boldsymbol{r}$ を$\boldsymbol{r}'$ に変換する行列は

$$A=\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2)\\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1)\\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

となる。

（ⅱ）　座標系の回転

同様に、式⑾より

$$\boldsymbol{r}'=(q_0-\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}(q_0+\boldsymbol{q})\equiv B\boldsymbol{r} \tag{16}$$

として、座標系 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ を $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$ に変換する行列は

$$B=\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2+q_0q_3) & 2(q_1q_3-q_0q_2)\\ 2(q_1q_2-q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3+q_0q_1)\\ 2(q_1q_3+q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

式⒂と⒄より、$A^T=B$ であることが分かる。ただし、T は転置行列を意味する。また、A とB は直交行列であるから$AB=I$ （単位行列）となる。

3.8　回転の合成

位置ベクトルまたは座標系に関して一連の回転を行ったときのクォータニオンと変換行列の合成について述べる。

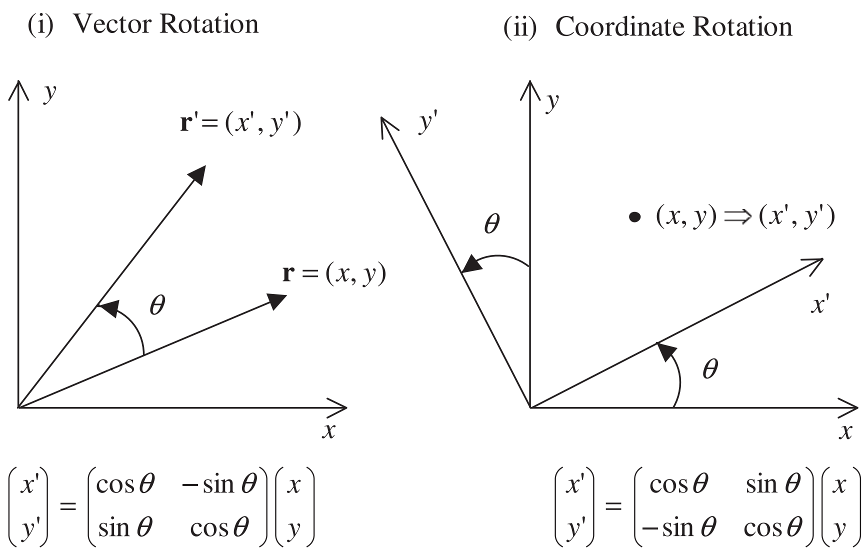

図２　位置ベクトルの回転と座標系の回転の違い（２次元）

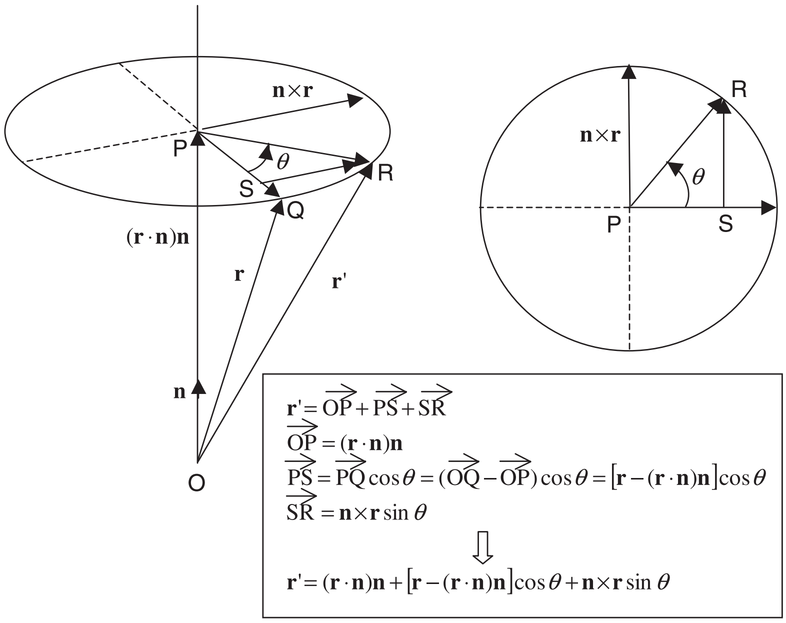

図３　位置ベクトルの回転

（ｉ）　位置ベクトルの回転

N 回の位置ベクトルの回転 $\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2 \to \cdots \to \boldsymbol{r}_N$ を行うとき、式⑽と⒁より

	クォータニオン	変換行列
１回：	$\boldsymbol{r}_2 = \tilde{q}_1 \boldsymbol{r}_1 \tilde{q}_1^*$	$\boldsymbol{r}_2 = A_1 \boldsymbol{r}_1$
２回：	$\boldsymbol{r}_3 = \tilde{q}_2 \boldsymbol{r}_2 \tilde{q}_2^*$	$\boldsymbol{r}_3 = A_2 \boldsymbol{r}_2$
⋮		
N 回：	$\boldsymbol{r}_N = \tilde{q}_{N-1} \boldsymbol{r}_{N-1} \tilde{q}_{N-1}^*$	$\boldsymbol{r}_N = A_{N-1} \boldsymbol{r}_{N-1}$

なので、$\boldsymbol{r}_N = \tilde{q} \boldsymbol{r}_1 \tilde{q}^*$ なるクォータニオンについて

$$\tilde{q} = \tilde{q}_{N-1} \cdots \tilde{q}_2 \tilde{q}_1 \tag{18}$$

$\boldsymbol{r}_N = A\boldsymbol{r}_1$ なる変換行列について

$$A = A_{N-1} \cdots A_2 A_1 \tag{19}$$

となる。クォータニオンと変換行列の積の順序は同じである。

（ⅱ）　座標系の回転

位置ベクトルの回転のときと同様に考える。N 回の座標系の回転 $\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2 \to \cdots \to \boldsymbol{r}_N$ を行うとき式⑾と⒃より $\boldsymbol{r}_N = \tilde{q} \boldsymbol{r}_1 \tilde{q}^*$ なるクォータニオンについて

$$\tilde{q} = \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \cdots \tilde{q}_{N-1} \tag{20}$$

$\boldsymbol{r}_N = B\boldsymbol{r}_1$ なる変換行列について

$$B = B_{N-1} \cdots B_2 B_1 \tag{21}$$

となり、クォータニオンと変換行列の積の順序は逆である。

3.9　クォータニオンの時間微分

クォータニオンの時間微分について考える。

（ｉ）　位置ベクトルの回転

時刻 t のクォータニオン $\tilde{q}(t)$ が Δt 後に $\tilde{q}(t+\Delta t)$ になったとすると、⒅より

$$\tilde{q}(t+\Delta t) = \tilde{q}(\Delta t)\tilde{q}(t)$$

が成り立つ。微小時間 Δt 間の変化が $\boldsymbol{n}$ まわりの微小角 $\Delta\theta$ によるものとすると

$$\tilde{q}(\Delta t) = \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx 1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\Delta\theta$$

これらより

$$\frac{\tilde{q}(t+\Delta t) - \tilde{q}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\boldsymbol{n}\tilde{q}(t)$$

が成り立つ。ここで、$\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\tilde{q} \tag{22}$$

ただし、

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{n}$$

とおいた。ここで、ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ とクォータニオン $\tilde{q} = q_0 + \boldsymbol{q}$ の積を⑴に従って評価すると、㉒は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \tag{23}$$

となる。これは位置ベクトルが角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転するときのクォータニオンの時間変化を表す。

（ⅱ）　座標系の回転

式⒇を用いると、時刻 $t+\Delta t$ のクォータニオンは

$$\tilde{q}(t+\Delta t) = \tilde{q}(t)\tilde{q}(\Delta t)$$

となり、（ｉ）と比較して積の順序が入れ代わる。同様

な手順で、座標系が角速度$\boldsymbol{\omega}$で回転するときのクォータニオンの時間変化は以下のようになる。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \tag{24}$$

3.10　複素数との対比

虚数単位を$\imath$として、実部a、虚部bよりなる複素数

$$z = a + b\imath \tag{25}$$

と比較すると、クォータニオンは複素数の拡張である超複素数（hyper-complex number）とみなすことができる。

複素数との対比を考えるとクォータニオンの公式が理解しやすくなる。クォータニオンと複素数の対比を表1にまとめる。

4. もう一つの定義

これまで、(3)のようにスカラー部をq_0に続いてベクトル部$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$を書いて

$$\tilde{q} = q_0 + \boldsymbol{q} = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$$

のようにクォータニオンを表記した。クォータニオンの定義にはもう一つの流儀がある。それは、ベクトル部$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$に続いてスカラー部$q_4$を書いて

$$\tilde{q} = \boldsymbol{q} + q_4 = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} + q_4$$

とする。

これまで3節で述べてきた公式は、$q_0 \to q_4$として、行列表記の対応する成分を置き換えることにより成り立つ。以下に、成分で表記する際に混乱が起きやすい公式をまとめる。

4.1　クォータニオン積

$$\begin{aligned} \tilde{q}\tilde{p} &= (p_4q_1 + p_3q_2 - p_2q_3 + p_1q_4)\boldsymbol{i} \\ &+ (-p_3q_1 + p_4q_2 + p_1q_3 + p_2q_4)\boldsymbol{j} \\ &+ (p_2q_1 - p_1q_2 + p_4q_3 + p_3q_4)\boldsymbol{k} \\ &+ (-p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + p_4q_4) \\ &= \begin{pmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_4 & p_3 & -p_2 & p_1 \\ -p_3 & p_4 & p_1 & p_2 \\ p_2 & -p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

表1　クォータニオンと複素数の対比

	クォータニオン	複素数
表記	$\tilde{q} = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$	$z = a + b\imath$
共役	$\tilde{q}^* = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k}$	$z^* = a - b\imath$
ノルム	$\\|\tilde{q}\\| = \tilde{q}\tilde{q}^*$	$\\|z\\| = zz^*$
基底／虚数単位	$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$	$\imath^2 = -1$

4.2　クォータニオン表現による変換行列

（ⅰ）　位置ベクトルの回転

変換 $\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}$ に対して

$$A = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 - q_2q_4) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}$$

（ⅱ）　座標系の回転

変換 $\boldsymbol{r}' = B\boldsymbol{r}$ に対して

$$B = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}$$

4.3　クォータニオンの時間微分

（ⅰ）　位置ベクトルの回転

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 & \omega_1 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 & \omega_2 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$$

（ⅱ）　座標系の回転

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$$

5. むすび

飛翔体の姿勢計算で使用するクォータニオンの公式について整理した。クォータニオンの定義には、スカラー部とベクトル部の順序に二つの流儀がある。また、位置ベクトルを回転する場合と座標系を回転する場合では回転の符号が逆になる。このため、実作業において混乱が発生する。本レポートで整理した公式により、クォータニオン計算を行う際の混乱が減少するはずである。

参考文献

(1)　太田浩一：マクスウェル理論の基礎―相対論と電磁気学，東京大学出版会，2002

(2)　堀　源一郎：天体力学講義，東京大学出版会，1988

(3) Wertz，J.R.：Spacecraft Attitude Determination and Control，Kluwer，1978
(4) Goldstein，H.：Classical Mechanics（2nd ed.），Addison Wesley，1980
(5) Kuipers，J.B.：Quaternions and Rotation Sequences，Princeton Univ. Press，1999
(6) 狼嘉　彰，冨田信之，中須賀真一，松永三郎：宇宙ステーション入門，東京大学出版会，2002
(7) 金谷一郎：3D-CGプログラマーのためのクォータニオン入門，工学社，2004
(8) 矢田部　学：四元数による回転表現，MSS技報，Vol.9，pp.13-18，1995